Chapitre 9 AIRES ET PÉRIMÈTRES

INTRODUCTION

Dès 1800 av. J.-C., les problèmes de géométrie au sujet de périmètres sont attestés. Un problème classique trouvé sur de nombreuses tablettes consistait à trouver les dimensions d'un rectangle, connaissant son aire et son périmètre :

Exemple de problème babylonien : Un champ rectangulaire possède une aire de 96 et un périmètre de 40. Quelles sont les longueur et largeur du champ ?

La légende veut que Didon, vers 800 av. J.-C., cherchant une terre pour fonder une nouvelle cité pour son peuple, obtint d'un roi qu'il lui en cède « autant qu'il en pourrait tenir dans la peau d'un bœuf ». Didon découpa une peau de bœuf en très fines lanières et choisit une péninsule : avec les lanières, elle sépara la péninsule du continent et put ainsi délimiter un vaste terrain. Carthage était née. La légende de Didon montre qu'aire et périmètre ne sont pas liés !

OBJECTIFS

- AP1 Calculer le périmètre d'un polygone
- AP2 Calculer le périmètre d'un polygone particulier
- AP3 Calculer la circonférence d'un cercle
- AP4 Calculer l'aire d'un triangle ou d'un rectangle
- AP5 Calculer l'aire d'un disque
- AP6 Déterminer une aire par un pavage ou un calcul

ATTENDUS : *Ce que sait faire l'élève*
- *Il connaît la formule de la longueur d'un cercle et l'utilise.*
- *Il utilise les multiples et sous-multiples du m² et les relations qui les lient.*
- *Il calcule l'aire d'un triangle à l'aide de la formule.*
- *Il calcule l'aire d'un disque à l'aide de la formule.*
- *Il détermine la mesure de l'aire d'une surface.*

I . Définitions

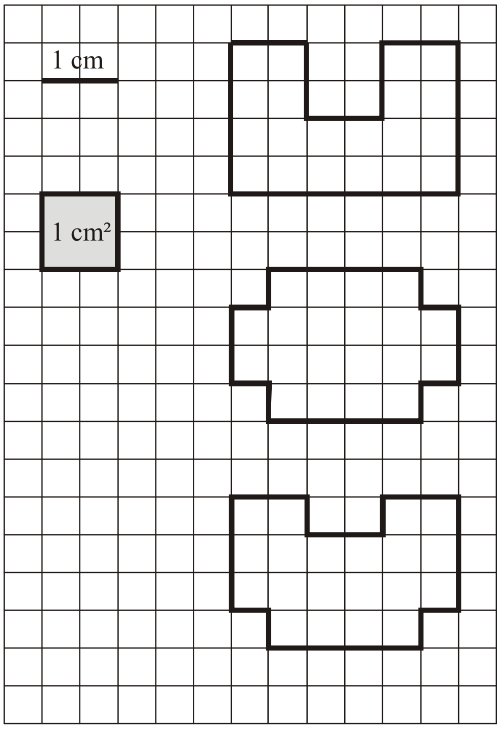
Activité 1

Calculs de périmètre et d'aire avec des pavages simples (Ap6)

Définition 1 : le **périmètre** d'une figure est la longueur de son contour.

Définition 2 : l'**aire** d'une figure est la mesure de sa surface : l'unité usuelle est le m^2.

Exemple : déterminer l'aire et le périmètre de chaque figure :



Périmètre : 12 cm
Aire : 5 cm^2

Périmètre : 10 cm
Aire : 5 cm^2

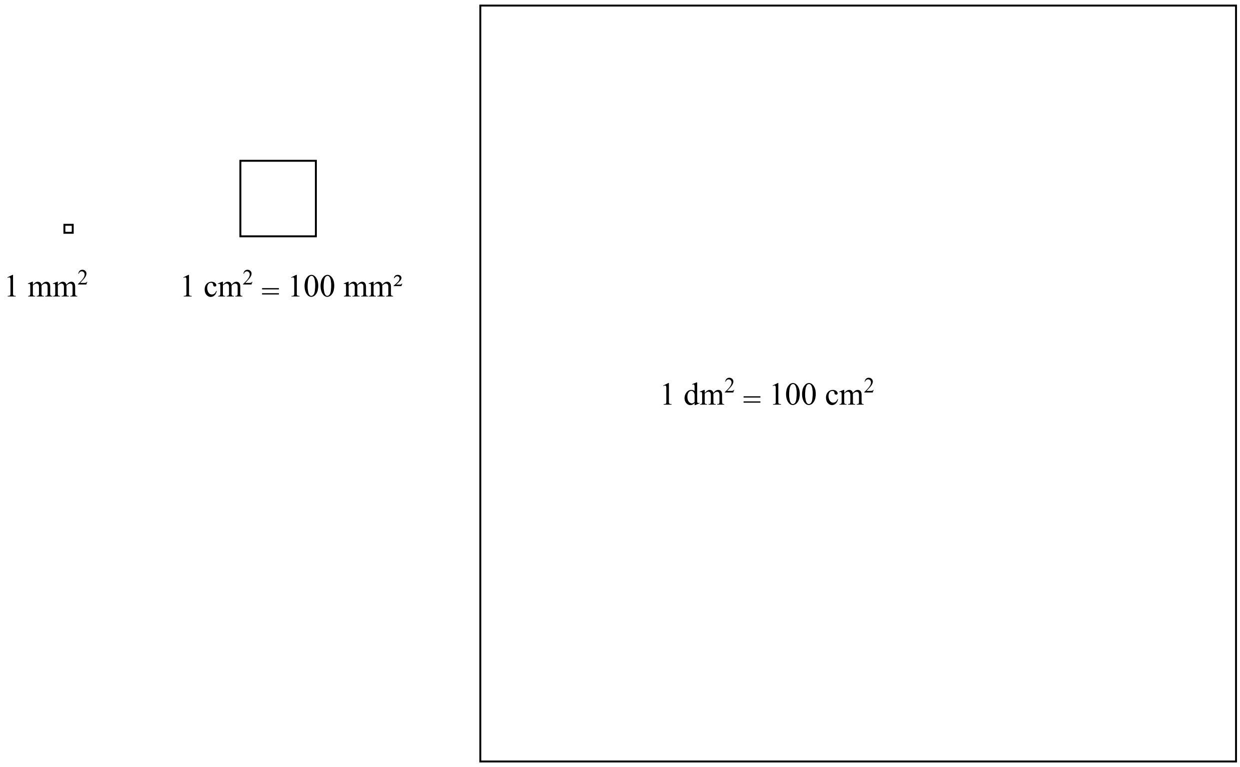
Périmètre : 11 cm
Aire : 5 cm^2

Exercices n° 1 à 3 X691

AP6 : Déterminer une aire par pavage

<u>II . Unités d'aire</u>

<u>Définition 3</u> : un **mètre carré** (1 m^2) est l'aire d'un carré de côté 1 mètre.



$\text{hm}^2 \xrightarrow{:\,100} \text{km}^2$ $\qquad$ $\text{cm}^2 \xrightarrow{\times\,100} \text{mm}^2$

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
				1	2	7	5	1	0				
			ha		a								

<u>Exemples</u> :
- 12,751 dam^2 = 1 275,1 m^2 = 127510 dm^2 = 0,12751 hm^2 = 0,12751 ha = 12,751 a ;
- 1,754 m^2 = 175,4 dm^2 = 17 540 cm^2 = 0,017 54 dam^2.

<u>Remarque</u> : un **hectare** est égal à un hectomètre carré et à 100 ares.

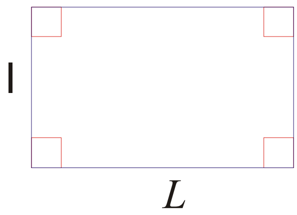
1 ha = 1 hm^2 = 100 a

<u>Exercices n° 4 à 9 X691</u>

Gr3 : Convertir des unités d'aire

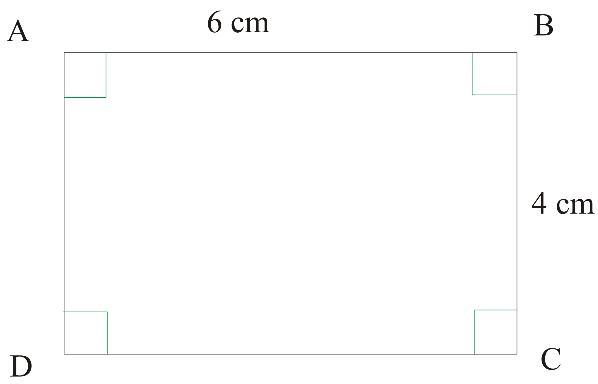
III . Calculs d’aires ($\mathscr{A}$) et de périmètres ($\mathscr{P}$)

1 . Le rectangle



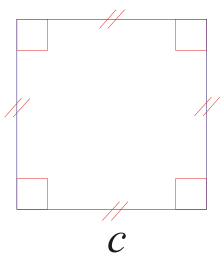
$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= L + \ell + L + \ell \\ &= (L + \ell) \times 2 \\ &= L \times 2 + \ell \times 2\end{aligned} \qquad \mathscr{A} = L \times \ell$$

Exemple : calculer le périmètre et l’aire du rectangle ABCD.



• (AB × 2) + (BC × 2) = (6 × 2) + (4 × 2) = 12 + 8 = 20 (en cm)
Ou bien : (AB + BC) × 2 = (6 + 4) × 2 = 10 × 2 = 10 (en cm)
Ou bien : AB + BC + CD + DA = 6 + 4 + 6 + 4 = 20 (en cm)
ABCD a un périmètre de 20 cm.
• AB × BC = 6 × 4 = 24 (en cm^2)
ABCD a une aire de 24 cm^2.

2 . Le carré



$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= c + c + c + c \\ &= 4 \times c\end{aligned} \qquad \mathscr{A} = c \times c = c^2$$

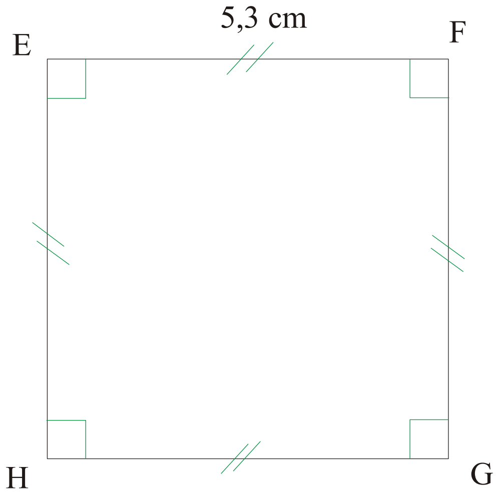
Exemple : calculer le périmètre et l'aire du carré EFGH de côté 5,3 cm.

- $EF \times 4 = 5,3 \times 4 = 21,2$ (en cm)

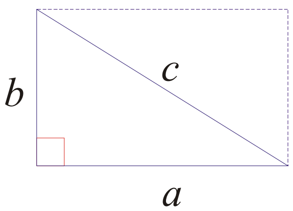
EFGH a un périmètre de 21,2 cm.

- $EF \times FG = 5,3 \times 5,3 = 28,09$ (en cm^2)

EFGH a une aire de 28,09 cm^2.



3 . Le triangle rectangle



$$\mathscr{P} = a + b + c \qquad \mathscr{A} = (a \times b) \div 2$$

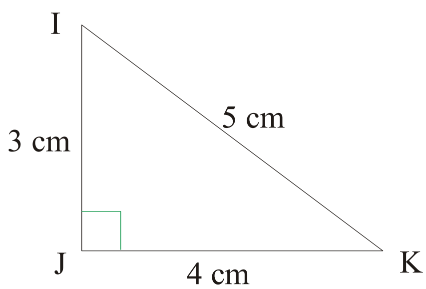
Exemple : calculer le périmètre et l'aire du triangle rectangle IJK.

- $IJ + JK + KI = 3 + 4 + 5 = 12$ (en cm)

IJK a un périmètre de 12 cm.

- $(IJ \times JK) \div 2 = (3 \times 4) \div 2 = 12 \div 2 = 6$ (en cm^2)

IJK a une aire de 6 cm^2.



Exercices n° 10 à 12 X691

AP2 : Calculer le périmètre d'un polygone régulier

Ap4 : Calculer l'aire d'un triangle ou d'un rectangle

4 . Cercles et disques

Propriété 1 : la longueur L d'un cercle de rayon R est égale au produit de π par le diamètre D :

$$\boxed{L = \pi \times D = 2 \times \pi \times R}$$

Propriété 2 : l'aire $\mathscr{A}$ d'un disque de rayon R est égale au produit de π par le carré du rayon :

$$\boxed{\mathscr{A} = \pi \times R \times R = \pi \times R^2}$$

Exemples :

1°) a) Calculer la longueur d'un cercle $\mathscr{C}$ de rayon OI = 2,7 cm, arrondie au mm près.
$2 \times \pi \times OI = 2 \times \pi \times 2{,}7 = 5{,}4 \times \pi \approx 17{,}0$ (en cm).
Le cercle a une longueur d'environ 17,0 cm.

b) Calculer l'aire du disque de rayon OI, arrondie au cm^2 près.
$\pi \times OI \times OI = \pi \times 2{,}7 \times 2{,}7 = 7{,}29 \times \pi \approx 23$ (en cm^2).
Le disque a une aire d'environ 23 cm^2.

2°) a) Calculer la longueur d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre AB = 8 m, arrondie au cm près.
$AB \times \pi = 8 \times \pi \approx 25{,}13$ (en m).
Le cercle a une longueur d'environ 25,13 m.

b) Calculer l'aire du disque arrondie au dm^2 près.
$OA = AB \div 2 = 8 \div 2 = 4$ (en cm).
Le disque a un rayon OA de 4 cm.
$\pi \times OA \times OA = \pi \times 4 \times 4 = 16 \times \pi \approx 50{,}27$ (en cm^2).
Le disque a une aire d'environ 50,27 cm^2.

Exercices n° 1 à 8 X692
Ap3 : Calculer la longueur d'un cercle
AP5 : Calculer l'aire d'un disque

Exercices n° 9 à 12 X692
AP6 : Déterminer une aire par calcul