Chapitre 2 LES TRIANGLES

INTRODUCTION

De nombreuses constructions géométriques de points, droites et cercles associés à un triangle sont liées par des propriétés qui étaient en bonne part déjà énoncées dans les Éléments d'Euclide, près de 300 ans avant Jésus-Christ. Les relations entre les mesures des angles et les longueurs des côtés sont notamment à l'origine de techniques de calcul de distances par triangulation. Le développement de ces techniques constitue d'ailleurs une branche des mathématiques appelée trigonométrie.

COMPÉTENCES ET ATTENDUS

- Tr1 Construire un triangle avec 3 longueurs
- Tr2 Construire un triangle avec longueurs et angles
- Tr3 Utiliser l'inégalité triangulaire
- Tr4 Calculer des angles dans un triangle
- Tr5 Construire les hauteurs d'un triangle
- Tr6 Calculer l'aire d'un triangle

Utilisation possible de Geogebra

Attendus : *À partir des connaissances suivantes : le codage des figures ; la somme des angles d'un triangle ; l'inégalité triangulaire ; la définition des hauteurs d'un triangle, l'élève met en œuvre et écrit un protocole de construction de triangles, Il calcule le périmètre et l'aire des figures usuelles (triangles), Il calcule le périmètre et l'aire d'un assemblage de figures.*

PROBLÈMES OUVERTS

① Sachant la somme des trois angles d'un triangle, combien vaut la somme des trois angles d'un quadrilatère ?
D'un pentagone ?
D'un hexagone ?
Chercher à établir une formule qui permette de calculer la somme des angles d'un polygone en fonction du nombre de ses côtés. On pourra appeler *n* se nombre.

② Comment découper un triangle en deux triangles de même aire ?

I . Constructions de triangles

Activité 1

Découverte de l'inégalité triangulaire, en construisant des triangles dont la somme des longueurs de côtés est 15.

Propriété 1 : l'inégalité triangulaire

Pour pouvoir construire un triangle, il faut que la somme des deux côtés les plus courts soit supérieure au côté le plus long.

Méthode 1 : utiliser l'inégalité triangulaire

Exemple : peut-on construire un triangle ABC avec AB = 3 cm, AC = 5 cm et BC = 1 cm ?

① *On sait que* :
AB + BC = 3 + 1 = 4 (en cm) et AC = 5 cm.
Donc la somme des deux côtés les plus courts est inférieure au côté le plus long.

② *On applique* : l'inégalité triangulaire.

③ *On conclut* : donc on ne peut pas construire le triangle ABC.

Remarque : si la somme des deux côtés les plus courts est **égale** au côté le plus long, on obtient trois points alignés.

Exercices n°1 à 5 X521, n°17 à 20 p 188, n°21 et 22 p 189
Tr3 : Utiliser l'inégalité triangulaire.

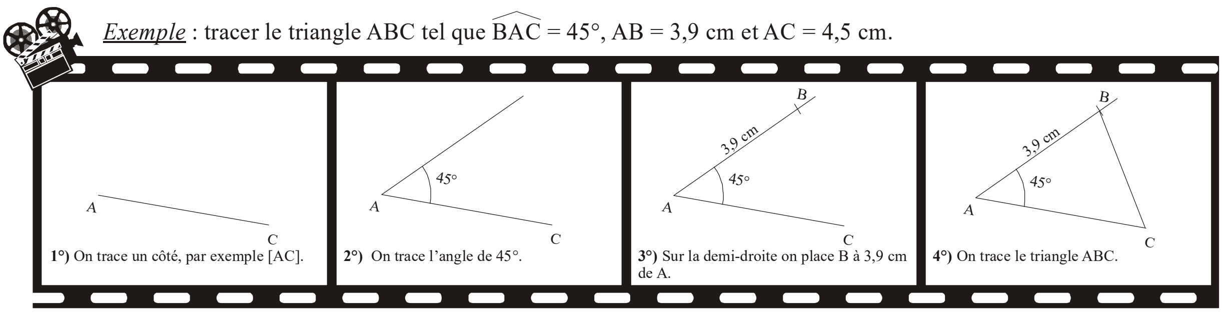
Exercices n°6 à 8 X521, n°23, 24, 26 et 27 p 189, n°83 p 196
Tr3 : Utiliser l'inégalité triangulaire (problèmes).

Méthode 2 : construire un triangle

Exemples :

1°) Tracer un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle qu'ils forment

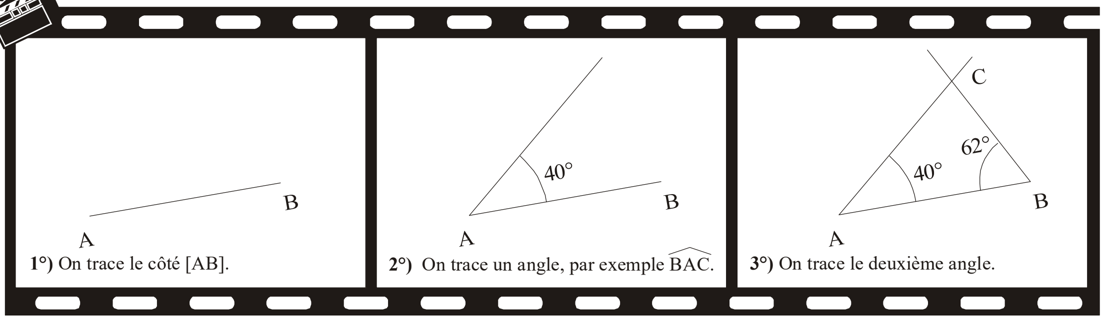
Exemple : tracer le triangle ABC tel que $\widehat{BAC} = 45°$, AB = 3,9 cm et AC = 4,5 cm.



(BC ≈ 6,5 cm)

2°) Tracer un triangle connaissant les longueurs d'un côté et les deux angles adjacents

Exemple : tracer le triangle ABC tel que AB = 3,5 cm, $\widehat{BAC} = 40°$, et $\widehat{ABC} = 62°$.



Exercices n°9 à 15 X521, n°2 à 6 p 186, n°7 à 9 p 187

Tr2 : Construire un triangle avec longueurs et angles

II . Angles d'un triangle

Activité en salle info

Découverte de la propriété avec GeoGebra et application avec Mathenpoche

Propriété 2 : dans un triangle, la somme des trois angles vaut toujours 180°.

Méthode 3 : calculer les angles d'un triangle

Exemple : ABC est un triangle tel que AB = 6 cm, $\widehat{ABC} = 33°$ et $\widehat{BAC} = 102°$.

Calculer $\widehat{BCA}$.

① On sait que : dans le triangle ABC, $\widehat{ABC} = 33°$ et $\widehat{BAC} = 102°$.

② On applique : or dans un triangle, la somme des trois angles vaut toujours 180°.

③ On conclut : $\widehat{BCA} = 180° - (\widehat{ABC} + \widehat{BAC})$

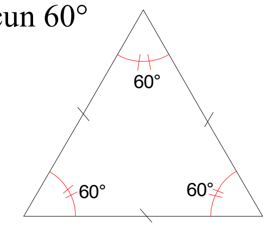
$= 180° - (33° + 102°)$

$= 180° - 135° = 45°$.

Donc l'angle $\widehat{BCA}$ mesure 45°.

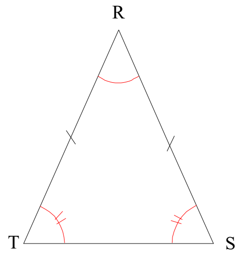
Remarques :

- dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux et mesurent chacun 60° (180° / 3 = 60°).



- dans un triangle isocèle, les deux angles à la base ont la même mesure.

RST est isocèle en R, donc $\widehat{RTS} = \widehat{RST}$.



Exercices n°1 à 5 X522, n°44 à 53 p 192

Tr4 : Calculer des angles dans un triangle.

Exercices n°6 à 8 X522, n°54, 56 et 58 p 193

Tr4 : Calculer des angles dans un triangle (problèmes).

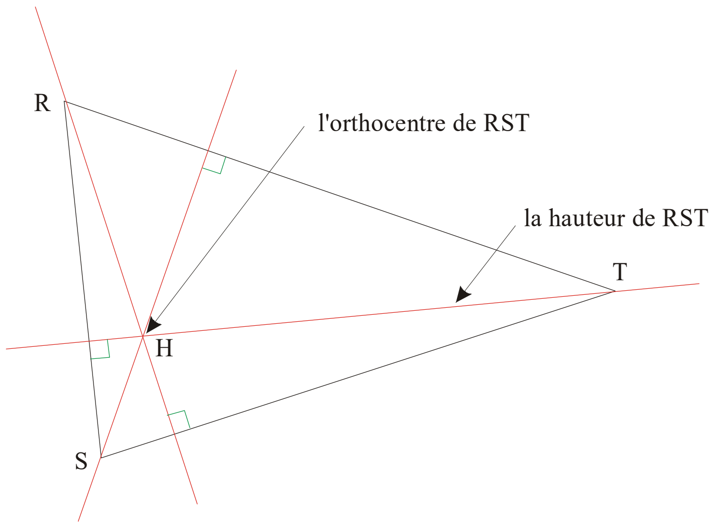
Exercices n°8 et 9 X522, n°59 p 193

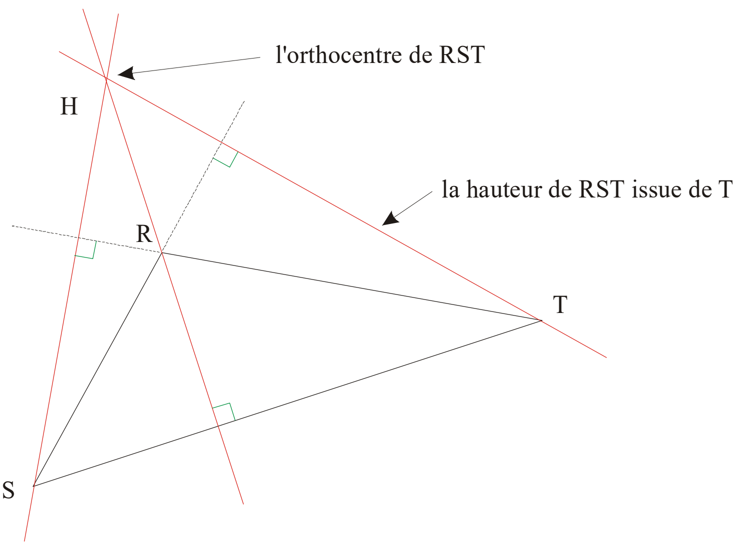
Tr4 : Calculer des angles dans un triangle (constructions).

III . Aire d'un triangle

Définition 1 : dans un triangle, une **hauteur** est une droite qui passe par un sommet et forme un angle droit avec le côté opposé.

Exemples :





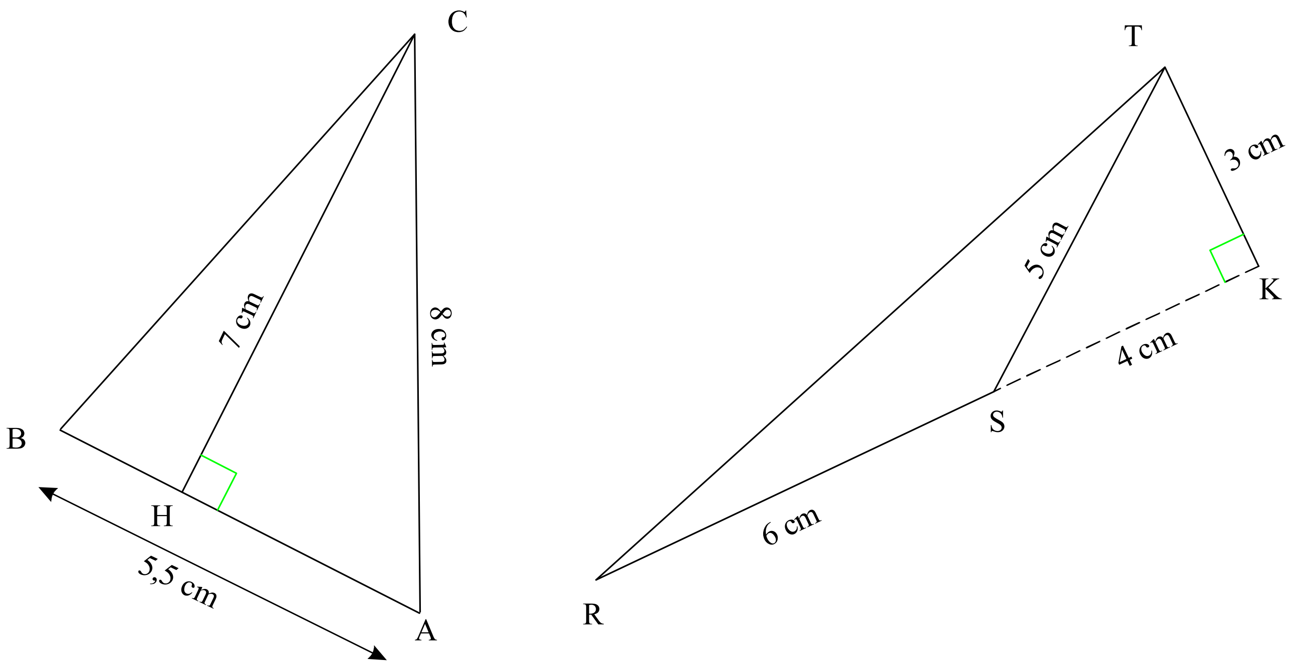
Exercices n°11 à 15 X522, n°31 à 35 p 190, n°36, 37 et 40 p 191

Tr5 : Construire les hauteurs d'un triangle.

Propriété 3 : l'aire d'un triangle est égale au demi-produit d'un côté par la hauteur **correspondante**.

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{\text{côté} \times \text{hauteur correspondante}}{2}}$$

Exemples : calculer l'aire des triangles ABC et RST.



- $\frac{AB \times CH}{2} = \frac{5,5 \times 7}{2} = \frac{38,5}{2} = 19,25$ (en cm^2).

ABC a une aire de 19,25 cm².

- $\frac{RS \times TK}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ (en cm^2).

RST a une aire de 9 cm².

Exercices n°1 à 3 fiche X523

Gr3 : Convertir les unités d'aire.

Exercices n°4 à 8 fiche X523, n°44 et 45 p 231, n°23 p 228

Tr6 : Calculer l'aire d'un triangle.