Chapitre 7 CALCUL LITTERAL

INTRODUCTION

L'algèbre fit un bond prodigieux au XVIe siècle grâce aux mathématiciens français François Viète 1540-1603) et Albert Girard (1595-1632), qui ont divulgué le calcul littéral : au lieu de poser et résoudre un problème en langage courant, ce qui devient vite lourd, ils utilisèrent des chiffres et des lettres.
Le passage de phrases à des lettres s'avéra puissant et efficace. On connaît la lourdeur d'un énoncé en langage courant. Ainsi : « Trouver un nombre dont le triple ajouté au nombre quatre vaut zéro » se simplifie, en langage mathématique, en « Résoudre $3x + 4 = 0$ ». Un problème qui nécessitait jadis plusieurs pages d'exposés se résout aujourd'hui en quelques lignes de calcul symbolique.

OBJECTIFS

- CL1 Produire et utiliser une expression littérale
- CL2 Tester une égalité
- CL3 Réduire une expression littérale
- CL4 Calculer une expression littérale pour une valeur

ATTENDUS : *L'élève utilise les notations 2a pour a × 2 ou 2 × a et ab pour a × b, a^2 pour a × a et a^3 pour a × a × a. Il utilise la distributivité simple pour réduire une expression littérale de la forme ax + bx où a et b sont des nombres décimaux. Il produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul. Il utilise une lettre pour traduire des propriétés générales. Il utilise une lettre pour démontrer une propriété générale. Il substitue une valeur numérique à une lettre pour : calculer la valeur d'une expression littérale ; tester, à la main ou de façon instrumentée, si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques ; contrôler son résultat.*

I . Expressions littérales

Définition 1 : une **expression littérale** est une formule contenant des nombres et des lettres. Chaque lettre représente un ou de nombres non connus.

Règle 1 : on peut supprimer le signe × entre une lettre et un nombre, en plaçant le nombre en premier.

Exemples :
- Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l est égal à $L \times 2 + l \times 2 = 2\,L + 2\,l$.
- « Si on multiplie un nombre par 7 et qu'on lui ajoute 2, on trouve 15. » se traduit par : « $7 \times x + 2 = 15$ », ou par « $7\,x + 2 = 15$ », où x représente le nombre inconnu.

Règle 2 : on peut multiplier les mêmes lettres entre elles.

Exemples :
- L'aire d'un carré de côté c est égale à $c \times c = c^2$.
- Le volume d'un cube d'arête a est égal à $a \times a \times a = a^3$.

Règle 3 : on peut ajouter les mêmes lettres entre elles.

Exemples :

- $x + x = 2\,x$
- $2\,x + 3\,x = 5\,x$
- $x + 2\,y + 3\,x + 5\,y = 4\,x + 7\,y$

Exemples récapitulatifs :

- $6 \times x \times 10 \times x = 60\,x^2$
- $x^2 \times 2\,x = 2\,x^3$
- $4\,x^2 + x + 2\,x^2 = 6\,x^2 + x$

Exercices n° 1 à 15 X571

CL3 : Réduire une expression littérale

II . Calculer une expression littérale pour une valeur

Exemple 1 : le périmètre P et l'aire A d'un disque de rayon r sont donnés par les formules suivantes : $P = 2\,\pi\,r$ et $A = \pi\,r^2$.

Calculer P et A pour $r = 6$ cm.

$P = 2 \times \pi \times 6 = 12 \times \pi = 12\,\pi$ (en cm) ;

$A = \pi \times 6^2 = \pi \times 36 = 36\,\pi$ (en cm²).

Exemple 2 : calculer l'expression $2\,x^2 + 3\,x - 5$ pour $x = 1$ et pour $x = 5$.

- $2 \times 1^2 + 3 \times 1 - 5 = 2 \times 1 + 3 - 5 = 2 + 3 - 5 = 5 - 5 = 0$;
- $2 \times 5^2 + 3 \times 5 - 5 = 2 \times 25 + 15 - 5 = 50 + 15 - 5 = 65 - 5 = 60$;

Exercices n° 16 à 22 X571

CL4 : Calculer une expression littérale pour une valeur

III . Tester des égalités

Exemple 3 : on considère l'égalité $7\,x + 1 = x + 4$.

Vérifier que cette égalité est vraie pour $x = 0{,}5$ et fausse pour $x = 3$.

- $7 \times 0{,}5 + 1 = 3{,}5 + 1 = 4{,}5$

  $0{,}5 + 4 = 4{,}5$

  Les deux résultats sont égaux, donc l'égalité $7\,x + 1 = x + 4$ est vraie pour $x = 0{,}5$.
- $7 \times 3 + 1 = 21 + 1 = 22$

  $3 + 4 = 7$

  Les deux résultats sont différents, donc l'égalité $7\,x + 1 = x + 4$ est fausse pour $x = 3$.

Exemple 4 : Kévin pense que le double d'un nombre ajouté à trois est toujours égal au triple du nombre.

a) Traduire l'affirmation de Kévin par une égalité entre deux expressions littérales.
b) L'égalité est-elle vraie si on choisit le nombre 3 ?
c) L'égalité est-elle vraie si on choisit le nombre 5 ?
d) Kévin a-t-il raison ?

a) Soit x le nombre de départ, la phrase de Kévin se traduit par :
$x \times 2 + 3 = x \times 3$
Ou mieux par : $2x + 3 = 3x$
b) $2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$
$3 \times 3 = 9$
L'égalité est vraie pour $x = 3$.
c) $2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$
$3 \times 5 = 15$
L'égalité est fausse pour $x = 5$.
d) Kévin se trompe, l'égalité n'est pas vraie pour TOUS les nombres.

Exercices n° 1 à 7 X572
CL2 : Tester une égalité

Exercices n° 8 à 13 X572
CL1 : Produire et utiliser une expression littérale