Chapitre 3 DEVELOPPEMENTS ET EQUATIONS

INTRODUCTION

L'algèbre fit un bond prodigieux au XVIe siècle grâce aux mathématiciens français François Viète 1540-1603) et Albert Girard (1595-1632), qui ont divulgué le calcul littéral : au lieu de poser et résoudre un problème en langage courant, ce qui devient vite lourd, ils utilisèrent des chiffres et des lettres.
Le passage de phrases à des lettres s'avéra puissant et efficace. On connaît la lourdeur d'un énoncé en langage courant. Ainsi : « Trouver un nombre dont le triple ajouté au nombre quatre vaut zéro » se simplifie, en langage mathématique, en « Résoudre $3x + 4 = 0$ ». Un problème qui nécessitait jadis plusieurs pages d'exposés se résout aujourd'hui en quelques lignes de calcul symbolique.

OBJECTIFS

- CL1 Produire et utiliser une expression littérale
- CL2 Tester une égalité
- CL3 Réduire une expression
- CL4 Calculer une expression littérale
- CL5 Développer un produit
- CL7 Développer $(a + b)(a - b)$
- Eq1 Résoudre une équation du 1er degré
- Eq2 Mettre en équation un problème

ATTENDUS : *L'élève produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul. Il utilise une lettre pour traduire des propriétés générales ou pour démontrer une propriété générale. Il substitue une valeur numérique à une lettre pour calculer la valeur d'une expression littérale ; tester si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques ; contrôler son résultat. Il détermine l'opposé d'une expression littérale. Il développe (par simple et double distributivités), réduit des expressions algébriques simples. Il développe des expression du type $(a + b)(a - b)$. Il résout algébriquement une équation du premier degré. Il résout des problèmes s'y ramenant, qui peuvent être internes aux mathématiques ou en lien avec d'autres disciplines.*

PROBLEMES OUVERTS

① Soient a et b deux nombres réels positifs. Des nombres suivants lequel est le plus grand ?

$$a^2 + b^2,\ ab,\ (a + b)^2,\ (a - b)^2,\ a^2 - b^2.$$

② Pierre et Laure se ne sont pas d'accord.
Pierre dit : " Dans l'expression $14n + 56$ si l'on remplace n par n'importe quel nombre entier, on obtient toujours un nombre différent de zéro ".
Laure affirme le contraire. Qui a raison ?

③ Ensorceler un nombre, c'est calculer le quotient de la différence du triple de ce nombre avec 5 par la somme de ce nombre et de 1.
Pour gagner le tournoi des rois sorciers, Harry Potter doit résoudre l'énigme suivante : qu'advient-il d'un nombre ensorcelé 4 fois ? 8 fois ? 2 000 fois ?
Ron pense que certains nombres ne peuvent pas être ensorcelés. Lesquels ?
Hermione regrette qu'il n'y ait pas de tableur à Poudlard…
Sans baguette magique pourras-tu répondre à ces questions ?

I . Développement

Activité 1

Programme de calculs, utilisation du calcul littéral pour prouver une conjecture (CL1, CL3 et CL4).

Définition 1 : **développer** un produit, c'est le transformer en somme.

Exemples en calcul littéral : développement et réduction.

$$\begin{aligned}
A &= 5 \times (x + 1) \\
&= 5 \times x + 5 \times 1 \\
&= 5\,x + 5\ ; \\
B &= (x - 2) \times 10 \\
&= 10 \times x - 10 \times 2 \\
&= 10\,x - 20\ ; \\
C &= (x + 4) \times (x - 3) \\
&= x \times x + x \times (-\,3) + 4 \times x + 4 \times (-\,3) \\
&= x^2 - 3\,x + 4\,x - 12 \\
&= x^2 + x - 12\ ; \\
D &= (7\,x - 1)\,(2\,x - 3) \\
&= 7\,x \times 2\,x + 7\,x \times (-\,3) + (-\,1) \times 2\,x + (-\,1) \times (-\,3) \\
&= 14\,x^2 - 21\,x - 2\,x + 3 \\
&= 14\,x^2 - 23\,x + 3. \\
E &= (2\,x + 3)\,(x - 1) - (x - 7)\,(5\,x + 1) \\
&= [2\,x \times x + 2\,x \times (-\,1) + 3 \times x + 3 \times (-\,1)] - [x \times 5\,x + x \times 1 + (-\,7) \times 5\,x + (-\,7) \times 1] \\
&= (2\,x^2 - 2\,x + 3\,x - 3) - (5\,x^2 + x - 35\,x - 7) \\
&= (2\,x^2 + x - 3) - (5\,x^2 - 34\,x - 7) \\
&= 2\,x^2 + x - 3 - 5\,x^2 + 34\,x + 7 \\
&= -\,3\,x^2 + 35\,x + 4.
\end{aligned}$$

Exemples en calcul mental :

- 50×102
  $= 50 \times (100 + 2)$
  $= 50 \times 100 + 50 \times 2$
  $= 5\,000 + 100 = 5\,100$;
- 99×20
  $= (100 - 1) \times 20$
  $= 20 \times 100 - 20 \times 1$
  $= 2\,000 - 20 = 1\,980$.

Exercices n° 1 et 2 X331
CL4 : Calculer une expression littérale

Exercices n° 3 à 6 X331
CL3 : Réduire une expression

Exercices n° 7 à 14 X331
CL5 : Développer un produit

Exercices n° 15 X331
CL1 : Produire et utiliser une expression littérale

Exercices n° 16 à 18 X331
CL4 : Calculer une expression littérale

II . Équations du premier degré

Méthode 1 : résoudre une équation du 1^er^ degré
Exemples : résoudre les équations suivantes.

- $3\,x + 1 = 5\,x - 3$

  $3\,x + 1 - 3\,x = 5\,x - 3 - 3\,x$ on soustrait 3 x de chaque côté
  $1 = 2\,x - 3$ tous les x sont du même côté
  $1 + 3 = 2\,x - 3 + 3$ on ajoute 3 de chaque côté
  $4 = 2\,x$ tous les x sont d'un côté et les nombres de l'autre
  $\frac{4}{2} = \frac{2\,x}{2}$ on divise de chaque côté par 2
  $\boxed{2 = x}$ il ne reste plus qu'un seul x

  Vérification : $3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7$
  $5 \times 2 - 3 = 10 - 3 = 7$
  La solution de l'équation est 2.

- $2\,(3\,x - 1) = 8$

  $2 \times 3\,x + 2 \times (-1) = 8$
  $6\,x - 2 = 8$
  $6\,x - 2 + 2 = 8 + 2$
  $6\,x = 10$
  $\frac{6\,x}{6} = \frac{10}{6}$
  $\boxed{x = \frac{5}{3}}$

  Vérification : $2 \times \left(3 \times \frac{5}{3} - 1\right) = 2 \times (5 - 1) = 2 \times 4 = 8$
  La solution de l'équation est $\frac{5}{3}$.

Exercices n° 1 à 4 X332
CL2 : Tester une égalité

Exercices n° 5 à 10 X332

Eq1 : Résoudre une équation du 1er degré

Méthode 2 : résoudre un problème avec une équation

Exemple : lors d'une élection, 5 219 bulletins ont été déposés dans l'urne. Le vainqueur bat ses concurrents respectivement de 22, de 30 et de 73 voix.
Combien de voix a obtenu le vainqueur ?

① *Choix de l'inconnue et contraintes*

Soit n le nombre de voix du vainqueur.
n est un nombre entier positif inférieur à 5 219.

② *Mise en équation*

Ses concurrents ont eu chacun $(n - 22)$, $(n - 30)$ et $(n - 73)$ voix.
Au total, il y a 5 219 bulletins, d'où l'équation :

$$\boxed{n + (n - 22) + (n - 30) + (n - 73) = 5\ 219}$$

③ *Résolution de l'équation*

$$n + (n - 22) + (n - 30) + (n - 73) = 5\ 219$$
$$n + n - 22 + n - 30 + n - 73 = 5\ 219$$
$$4\ n - 125 = 5\ 219$$
$$4\ n - 125 + 125 = 5\ 219 + 125$$
$$4\ n = 5\ 344$$
$$\frac{4\ n}{4} = \frac{5\ 344}{4}$$
$$\boxed{n = 1\ 336}$$

④ *Vérifications et conclusion*

- 1 336 est bien un nombre entier positif inférieur à 5 219.
- $1\ 336 + (1\ 336 - 22) + (1\ 336 - 30) + (1\ 336 - 73)$
  $= 1\ 336 + 1\ 314 + 1\ 306 + 1\ 263 = 5\ 219$
- Le vainqueur a reçu 1 336 voix.

Exercices n° 11 à 16 X332

Eq2 : Mettre en équation un problème

III . Une identité remarquable

Propriété 1 : $\boxed{(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2}$.

Exemples :

- $(x + 2)\,(x - 2)$
  $= x^2 - 2^2$
  $= x^2 - 4$;
- $(5\,x - 4)\,(5\,x + 4)$
  $= (5\,x)^2 - 4^2$
  $= 25\,x^2 - 16$;
- 99×101
  $= (100 - 1) \times (100 + 1)$
  $= 100^2 - 1^2$
  $= 10\,000 - 1 = 9\,999$.

Exercices n° 17 à 19 X332
CL7 : Développer (a + b)(a – b)