Chapitre 12 L'ARITHMÉTIQUE

INTRODUCTION

L'arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers
Le mot « arithmétique » trouve ses racines dans le grec ancien, dérivant du terme ἀριθμός (arithmós), qui signifie simplement "nombre".
L'origine de l'arithmétique remonte à l'Antiquité. Voici quelques moments clés de son histoire :

- Égypte antique : Les Égyptiens utilisaient des méthodes arithmétiques pour résoudre des problèmes pratiques, comme la gestion des récoltes et la construction des pyramides.
- Babylone : Les Babyloniens ont développé des systèmes de numération positionnels et des tablettes d'argile contenant des calculs arithmétiques. Ils avaient même une forme primitive de table de multiplication.
- Inde ancienne : Les mathématiciens indiens ont apporté des contributions majeures à l'arithmétique, notamment le système décimal (avec le zéro) et les algorithmes pour la multiplication et la division.
- Europe médiévale : Au Moyen Âge, l'arithmétique était enseignée dans les écoles monastiques et était considérée comme l'une des sept arts libéraux. Des mathématiciens comme Fibonacci ont popularisé les chiffres arabes en Europe.
- Époque moderne : Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand du XVIIIe siècle, a approfondi l'arithmétique en explorant les nombres premiers, les congruences et les imaginaires de l'arithmétique.

OBJECTIFS

- Ar1 Utiliser diviseurs, multiples et nombres premiers
- Ar2 Décomposer en facteurs premiers
- Ar3 Simplifier une fraction pour la rendre irréductible
- Ar4 Résoudre un problème d'arithmétique

ATTENDUS : *Il détermine la liste des nombres premiers inférieurs à 100. Il décompose un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main, à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de programmation). Il simplifie une fraction pour la rendre irréductible. Il modélise et résout des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes…).*

I . Les nombres premiers

Définition 1 : un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : le début de la liste des nombres premiers est 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31…

Propriété 1 : on peut toujours décomposer un nombre entier non premier en un produit de plusieurs nombres premiers.

Exemple : $1\,176 = 2 \times 588 = 2 \times 2 \times 294 = 2 \times 2 \times 2 \times 147 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 49 = 2^3 \times 3 \times 7^2$

Exercices n° 1 à 6 X3-12-1
Ar1 : Utiliser diviseurs, multiples et nombres premiers
Ar2 : Décomposer en facteurs premiers

II . Fractions irréductibles

Définition 2 : une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier : son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple : simplifier $\frac{990}{312}$ pour la rendre irréductible.

- $990 = 2 \times 495 = 2 \times 3 \times 165 = 2 \times 3 \times 3 \times 55 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$
- $312 = 2 \times 156 = 2 \times 2 \times 78 = 2 \times 2 \times 2 \times 39 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^3 \times 3 \times 13$

$$\frac{990}{312} = \frac{2 \times 3^2 \times 5 \times 11}{2^3 \times 3 \times 13} = \frac{3 \times 5 \times 11}{2^2 \times 13} = \frac{165}{52}$$

Exercices n° 7 et 8 X3-12-1
Ar3 : Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

Exercices n° 9 et 13 X3-12-1
Ar4 : Résoudre un problème d'arithmétique