Chapitre 8 AIRES ET PÉRIMÈTRES

INTRODUCTION

Dès 1800 av. J.-C., les problèmes de géométrie au sujet de périmètres sont attestés. Un problème classique trouvé sur de nombreuses tablettes consistait à trouver les dimensions d'un rectangle, connaissant son aire et son périmètre :

Exemple de problème babylonien : Un champ rectangulaire possède une aire de 96 et un périmètre de 40. Quelles sont les longueur et largeur du champ ?

La légende veut que Didon, vers 800 av. J.-C., cherchant une terre pour fonder une nouvelle cité pour son peuple, obtint d'un roi qu'il lui en cède « autant qu'il en pourrait tenir dans la peau d'un bœuf ». Didon découpa une peau de bœuf en très fines lanières et choisit une péninsule : avec les lanières, elle sépara la péninsule du continent et put ainsi délimiter un vaste terrain. Carthage était née. La légende de Didon montre qu'aire et périmètre ne sont pas liés !

OBJECTIFS

- AP1 Calculer le périmètre d'un polygone
- AP2 Calculer le périmètre d'un disque
- AP3 Calculer l'aire d'un rectangle
- AP4 Convertir des aires

EXEMPLES DE RÉUSSITE :

• L'élève écrit et apprend les formules P = π × D ; P = 2 × π × R, où D est le diamètre du disque, R son rayon et P son périmètre.

• L'élève calcule le périmètre de figures dont le contour contient des cercles ou des portions de cercles.

• L'élève sait que 1 mm² est l'aire d'un carré de 1 mm de côté et que 1 km² est l'aire d'un carré de 1 km de côté.

• L'élève convertit en m² (respectivement en dm²) une aire donnée en dm² (respectivement en cm²) et inversement. Le recours à un tableau de conversion est déconseillé à ce stade de l'apprentissage.

Les autres conversions d'aire ne figurent pas au programme.

• L'élève verbalise la formule de l'aire d'un carré sous la forme « l'aire d'un carré est égal au produit de son côté par son côté ». Il l'écrit sous la forme « aire = côté × côté » avant de la formaliser sous la forme littérale A = c × c.

• Il adopte une démarche similaire pour l'aire du rectangle.

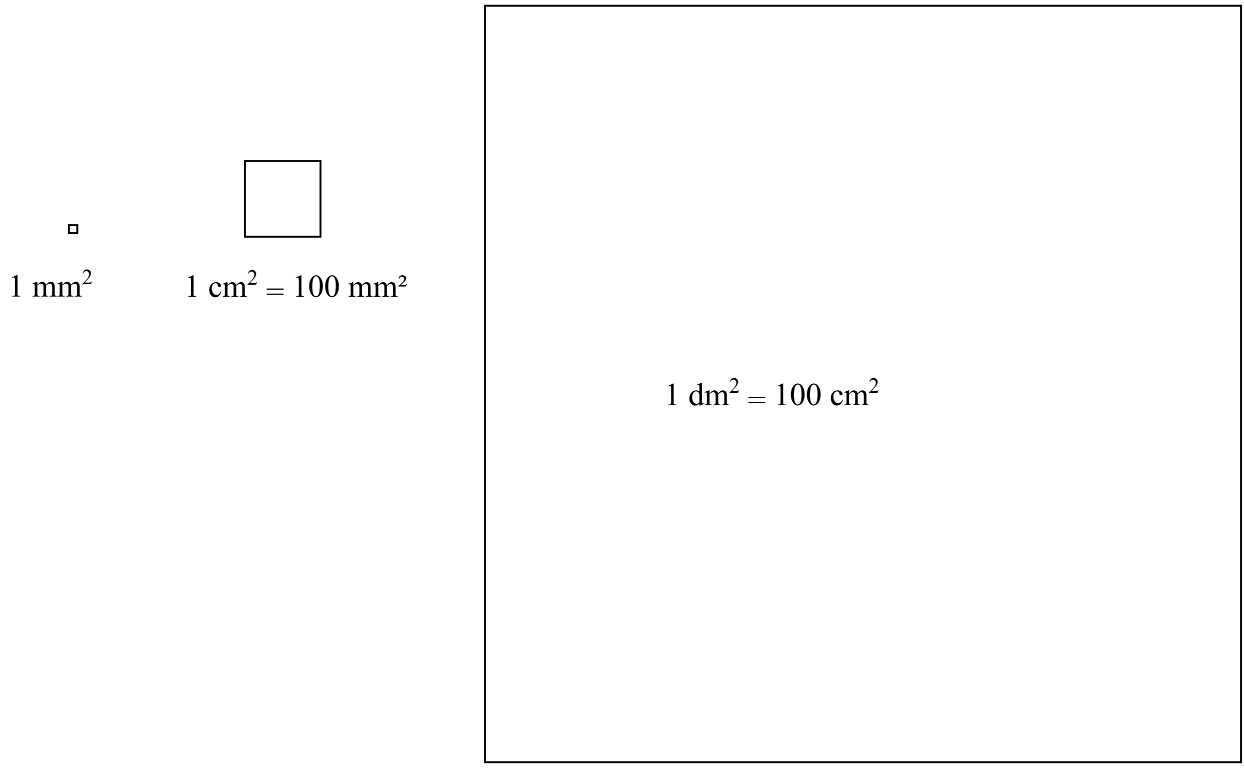
• En lien avec l'initiation à la pensée algébrique, l'élève utilise les formules du périmètre et de l'aire d'un rectangle dans lesquelles il substitue des valeurs numériques aux deux lettres.

I . Définitions

Définition 1 : le **périmètre** d'une figure est la longueur de son contour.

Définition 2 : l'**aire** d'une figure est la mesure de sa surface : l'unité usuelle est le m^2.

Définition 3 : un **mètre carré** (1 m^2) est l'aire d'un carré de côté 1 mètre.



Exemples :

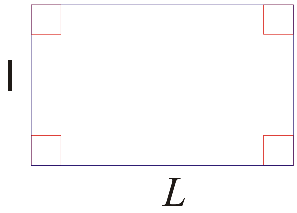
- 1 dm^2 = 100 cm^2 ;
- 1 m^2 = 100 dm^2 = 10 000 cm^2 ;
- 12,75 m^2 = 1275 dm^2 = 127 500 cm^2.
- 4 320 cm^2 = 43,2 dm^2 = 0,432 m^2.

Exercices n° 1 à 3 X681

AP4 : Convertir des aires

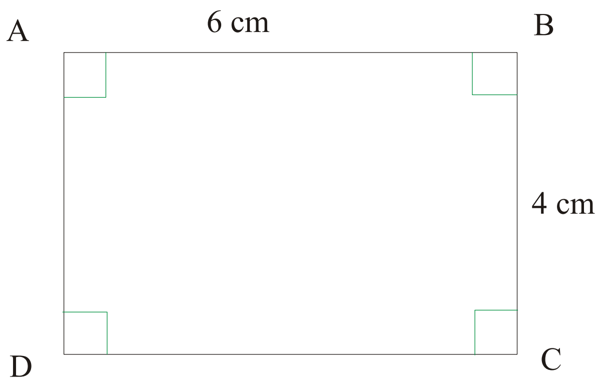
II . Calculs d'aires ($\mathscr{A}$) et de périmètres ($\mathscr{P}$)

1 . Le rectangle



$$\begin{aligned} \mathscr{P} &= L + \ell + L + \ell \\ &= (L + \ell) \times 2 \\ &= L \times 2 + \ell \times 2 \end{aligned} \qquad \mathscr{A} = L \times \ell$$

Exemple : calculer le périmètre et l'aire du rectangle ABCD.



- AB × 2 + BC × 2 = 6 × 2 + 4 × 2 = 12 + 8 = 20 (en cm)

Ou bien : (AB + BC) × 2 = (6 + 4) × 2 = 10 × 2 = 20 (en cm)

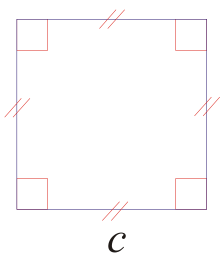
Ou bien : AB + BC + CD + DA = 6 + 4 + 6 + 4 = 20 (en cm)

ABCD a un périmètre de 20 cm.

- AB × BC = 6 × 4 = 24 (en cm^2)

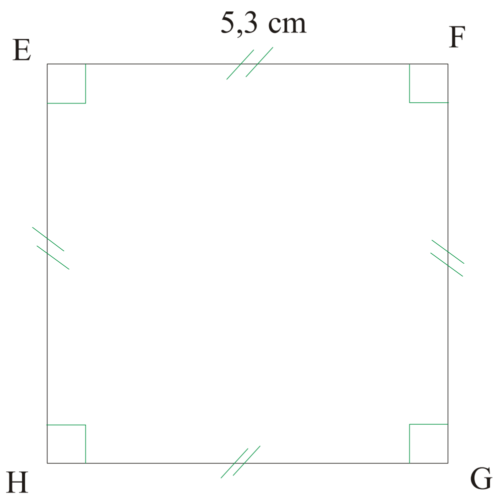
ABCD a une aire de 24 cm^2.

2 . Le carré



$$\begin{aligned} \mathscr{P} &= c + c + c + c \\ &= 4 \times c \end{aligned} \qquad \mathscr{A} = c \times c = c^2$$

Exemple : calculer le périmètre et l'aire du carré EFGH de côté 5,3 cm.



• $EF \times 4 = 5,3 \times 4 = 21,2$ (en cm)
EFGH a un périmètre de 21,2 cm.
• $EF \times FG = 5,3 \times 5,3 = 28,09$ (en cm^2)
EFGH a une aire de 28,09 cm^2.

Exercices n° 4 à 9 X681
Ap1 : Calculer l'aire d'un polygone
Ap3 : Calculer l'aire d'un rectangle

3 . Cercles et disques

Propriété 1 : la longueur L d'un cercle de rayon R est égale au produit de π par le diamètre D :

$$\boxed{L = \pi \times D = 2 \times \pi \times R}$$

Exemples :

1°) Calculer la longueur d'un cercle $\mathscr{C}$ de rayon OI = 2,7 cm, arrondie au mm près.
$2 \times \pi \times OI = 2 \times \pi \times 2,7 = 5,4 \times \pi \approx 17,0$ (en cm).
Le cercle a une longueur d'environ 17,0 cm.

2°) Calculer la longueur d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre AB = 8 m, arrondie au cm près.
$AB \times \pi = 8 \times \pi \approx 25,13$ (en m).
Le cercle a une longueur d'environ 25,13 m.

Exercices n° 10 à 16 X681
Ap2 : Calculer le périmètre d'un disque